Лекция 3

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1. *Классификация уравнений второго порядка. Приведение уравнений к каноническому виду.*

Пусть $u(x,y)u(x,y)$- функция двух независимых переменных и пусть $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a, b, c, f$ $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a, b, c, f$ – заданные функции переменных x и y.

Определение 1: дифференциальное уравнение вида:

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + au_x + bu_y + cu = f(x,y)$$
$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + au_x + bu_y + cu = f(x,y) \qquad (1)$$

Называется **линейным уравнением в частных производных второго порядка**.

Если функции $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a, b, c, f$ $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a, b, c, f$ зависят не только от переменных x и y, но и от искомой функции u, то уравнение (1) называется **квазилинейным.**

Определение 2: Уравнение $a_{11}(dy)^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}(dx)^2 = 0$ $a_{11}(dy)^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}(dx)^2 = 0$ (2)

называется **характеристическим**. Кривые, которые описываются уравнением $\varphi(x,y) = \mathrm{C}$ $\varphi(x,y) = \mathrm{C}$, где φ φ – решение уравнения (2), называются характеристиками уравнения (1).

Классификация уравнений второго порядка

Тип уравнения (1) определяется знаком выражения $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$:

1) Если $\Delta > 0$ $\Delta > 0$ в некоторой области D, то уравнение (1) относится в этой области к уравнениям **гиперболического** типа. В этом случае характеристическое уравнение (2) эквивалентно двум уравнениям:

$$a_{11}dy - \left(a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}\right)dx = 0 \quad a_{11}dy - \left(a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}\right)dx = 0$$
(3)

$a_{11}dy - \left(a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}\right)dx = 0$ $a_{11}dy - \left(a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}\right)dx = 0$
(4)

Общие интегралы $\varphi(x,y) = C_1,$ $\psi(x,y) = C_2$ $\varphi(x,y) = C_1,$ $\psi(x,y) = C_2$ этих уравнений являются вещественными и определяют два различных семейства характеристических уравнения (1).

Замена переменных $\varphi(x,y) = \xi,$ $\psi(x,y) = \eta$ $\varphi(x,y) = \xi,$ $\psi(x,y) = \eta$ приводит уравнение гиперболического типа к каноническому виду:

$u_{\xi\eta} = a_1u_\xi + b_1u_\eta + c_1u + d_1$ $u_{\xi\eta} = a_1u_\xi + b_1u_\eta + c_1u + d_1$
(5)

где a_1, b_1, c_1, d_1 a_1, b_1, c_1, d_1 - некоторые функции переменных $\xi,$ η $\xi,$ η .

2) Если $\Delta = 0$ $\Delta = 0$ в некоторой области D, то уравнение (1) относится в этой области к уравнениям **параболического** типа. В этом случае уравнения (3) и (4) совпадают между собой. Общий интеграл $\varphi(x,y) = C_1$ $\varphi(x,y) = C_1$ определяет одно семейство кривых.

Замена переменных $\varphi(x,y) = \xi,$ $\psi(x,y) = \eta$ $\varphi(x,y) = \xi,$ $\psi(x,y) = \eta$, где $\psi(x,y) -$ $\psi(x,y) -$ произвольная, дважды дифференцируемая, не выражающаяся через $\varphi(x,y)$ $\varphi(x,y)$ функция, приводит уравнение параболического типа к каноническому виду:

$$u_{\eta\eta} = a_1u_\xi + b_1u_\eta + c_1u + d_1 \quad u_{\eta\eta} = a_1u_\xi + b_1u_\eta + c_1u + d_1 \qquad (6)$$

3) Если $\Delta < 0$ $\Delta < 0$ в некоторой области D, то уравнение (1) относится в этой области к уравнениям **эллиптического** типа. Общие интегралы $\varphi(x,y) \pm i\psi(x,y) = C$ $\varphi(x,y) \pm i\psi(x,y) = C$ таких уравнений является комплексно –сопряженным и определяет два семейства кривых. Замена переменных $\varphi(x,y) = \xi,$ $\psi(x,y) = \eta$ $\varphi(x,y) = \xi,$ $\psi(x,y) = \eta$ - вещественная и мнимая части любого из двух общих интегралов уравнения характеристик, приводит уравнение эллиптического типа к каноническому виду:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = a_1u_\xi + b_1u_\eta + c_1u + d_1 \quad u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = a_1u_\xi + b_1u_\eta + c_1u + d_1 \qquad (7)$$

МЕТОДИКА ПРИВЕДЕНИЯ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

1. Определяем коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22} a_{11}, a_{12}, a_{22}

2. Вычисляем выражение $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$, делаем вывод о типе уравнения.

3. Находим общие интегралы уравнения (2)

4. В уравнении (1) делаем замену переменных, используя при этом правила дифференцирования сложной функции:

$$u_x = \xi_x u_\xi + \eta_x u_\eta, \qquad u_y = \xi_y u_\xi + \eta_y u_\eta$$

$$u_x = \xi_x u_\xi + \eta_x u_\eta, \qquad u_y = \xi_y u_\xi + \eta_y u_\eta$$

$$u_{xx} = \xi_x^2 u_{\xi\xi} + 2\xi_x \eta_x u_{\xi\eta} + \eta_x^2 u_{\eta\eta} + \xi_{xx} u_\xi + \eta_{xx} u_\eta$$

$$u_{xx} = \xi_x^2 u_{\xi\xi} + 2\xi_x \eta_x u_{\xi\eta} + \eta_x^2 u_{\eta\eta} + \xi_{xx} u_\xi + \eta_{xx} u_\eta$$

$$u_{xy} = \xi_x \xi_y u_{\xi\xi} + (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) u_{\xi\eta} + \eta_x \eta_y u_{\eta\eta} + \xi_{xy} u_\xi + \eta_{xy} u_\eta$$

$$u_{xy} = \xi_x \xi_y u_{\xi\xi} + (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) u_{\xi\eta} + \eta_x \eta_y u_{\eta\eta} + \xi_{xy} u_\xi + \eta_{xy} u_\eta$$

$$u_{yy} = \xi_y^2 u_{\xi\xi} + 2\xi_y \eta_y u_{\xi\eta} + \eta_y^2 u_{\eta\eta} + \xi_{yy} u_\xi + \eta_{yy} u_\eta$$

5. Подставим полученные производные в уравнение (1).

Замечания.

1. Уравнение (1) может изменять свой тип при переходе из одной области в другую.
2. Если же коэффициенты уравнения постоянны, то его тип остается неизменным во всей плоскости XOY. В этом случае возможны дальнейшие упрощения уравнения после его приведения к каноническому виду.

В частности, в уравнениях гиперболического типа (5) и эллиптического типа (7) можно избавиться от первых производных, используя подстановку $u(\xi,\eta) = v(\xi,\eta)e^{\alpha\xi+\beta\eta}$ $u(\xi,\eta) = v(\xi,\eta)e^{\alpha\xi+\beta\eta}$ и выбирая надлежащим образом параметры α и β.

В уравнениях параболического типа подобным образом удается обратить в нуль коэффициенты при одной из производных первого порядка и при самой искомой функции.

Пример 1. Привести к каноническому виду уравнение $u_{xx} + u_{yy} = 0$ $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

Решение: 1. $a_{11} = 1, \quad a_{12} = 0, a_{22} = 1$ $a_{11} = 1, \quad a_{12} = 0, a_{22} = 1$

2. $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -1 < 0 \Rightarrow$ $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -1 < 0 \Rightarrow$ уравнение является эллиптическим во всей плоскости ХОУ.

3. $(dy)^2 + (dx)^2 = 0 \Rightarrow (dy)^2 = -(dx)^2 \Rightarrow dy = \pm i dx \Rightarrow dy \pm i dx = C$
$(dy)^2 + (dx)^2 = 0 \Rightarrow (dy)^2 = -(dx)^2 \Rightarrow dy = \pm i dx \Rightarrow dy \pm i dx = C$
$y \pm ix = C \Rightarrow \xi = y, \quad \eta = x$ $y \pm ix = C \Rightarrow \xi = y, \quad \eta = x$

4. $\xi_x = 0, \xi_y = 1, \eta_x = 1, \quad \eta_y = 0, \xi_{xx} = \xi_{yy} = \xi_{xy} = \eta_{xx} = \eta_{yy} = \eta_{xy} = 0$
$\xi_x = 0, \xi_y = 1, \eta_x = 1, \quad \eta_y = 0, \xi_{xx} = \xi_{yy} = \xi_{xy} = \eta_{xx} = \eta_{yy} = \eta_{xy} = 0$
$u_{xx} = u_{\eta\eta}, u_{yy} = u_{\xi\xi}$ $u_{xx} = u_{\eta\eta}, u_{yy} = u_{\xi\xi}$

5. $u_{\eta\eta} + u_{\xi\xi} = 0$ $u_{\eta\eta} + u_{\xi\xi} = 0$

Пример 2. Привести к каноническому виду уравнение $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} + u_x + u_y = 0$ $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} + u_x + u_y = 0$

Решение: 1. $a_{11} = 1, \quad a_{12} = 1, a_{22} = -3$ $a_{11} = 1, \quad a_{12} = 1, a_{22} = -3$

2. $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 4 > 0 \Rightarrow$ $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 4 > 0 \Rightarrow$ уравнение является гиперболическим во всей плоскости ХОУ.

3. $(dy)^2 - 2dxdy - 3(dx)^2 = 0$ $(dy)^2 - 2dxdy - 3(dx)^2 = 0$
$dy + 3dx = 0, \quad dy - 3dx = 0 \Rightarrow 3x - y = C_1, 3x + y = C_2$
$dy + 3dx = 0, \quad dy - 3dx = 0 \Rightarrow 3x - y = C_1, 3x + y = C_2$

4. $\xi_x = 3, \xi_y = 3, \eta_x = -1, \quad \eta_y = 1, \xi_{xx} = \xi_{yy} = \xi_{xy} = \eta_{xx} = \eta_{yy} = \eta_{xy} = 0$
$\xi_x = 3, \xi_y = 3, \eta_x = -1, \quad \eta_y = 1, \xi_{xx} = \xi_{yy} = \xi_{xy} = \eta_{xx} = \eta_{yy} = \eta_{xy} = 0$
$u_x = 3u_\xi + 3u_\eta, \quad u_y = -3u_\xi + u_\eta$
$u_x = 3u_\xi + 3u_\eta, \quad u_y = -3u_\xi + u_\eta$
$u_{xx} = 9u_{\xi\xi} + 18u_{\xi\eta} + 9u_{\eta\eta}$ $u_{xx} = 9u_{\xi\xi} + 18u_{\xi\eta} + 9u_{\eta\eta}$
$u_{xy} = -3u_{\xi\xi} + 3u_{\eta\eta}, \quad u_{yy} = u_{\xi\xi} - 4u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$
$u_{xy} = -3u_{\xi\xi} + 3u_{\eta\eta}, \quad u_{yy} = u_{\xi\xi} - 4u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$

5. $u_{\xi\eta} = -\dfrac{u_\xi + 2u_\eta}{15}$ $u_{\xi\eta} = -\dfrac{u_\xi + 2u_\eta}{15}$

Пример 3. Привести к каноническому виду уравнение $u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} + u_x + u_y = 0$ $u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} + u_x + u_y = 0$

Решение: 1. $a_{11} = 1, \quad a_{12} = 2, a_{22} = 4$ $a_{11} = 1, \quad a_{12} = 2, a_{22} = 4$

2. $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0 \Rightarrow$ $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0 \Rightarrow$ уравнение является параболическим во всей плоскости ХОУ.

3. $(dy)^2 - 4dxdy + 4(dx)^2 = (dy - 2dx)^2 = 0$
$(dy)^2 - 4dxdy + 4(dx)^2 = (dy - 2dx)^2 = 0$

$y - 2x = C \Rightarrow y - 2x = \xi, y = \eta$ $y - 2x = C \Rightarrow y - 2x = \xi, y = \eta$

4. $\xi_x = -2, \xi_y = 1, \eta_x = 0, \quad \eta_y = 1,$
$\xi_x = -2, \xi_y = 1, \eta_x = 0, \quad \eta_y = 1,$
$\xi_{xx} = \xi_{yy} = \xi_{xy} = \eta_{xx} = \eta_{yy} = \eta_{xy} = 0$
$\xi_{xx} = \xi_{yy} = \xi_{xy} = \eta_{xx} = \eta_{yy} = \eta_{xy} = 0$

5. $u_{\eta\eta} = \frac{u_{\xi - u_\eta}}{4}$ $u_{\eta\eta} = \frac{u_{\xi - u_\eta}}{4}$

2. Основные уравнения математической физики

Уравнения математической физики представляют собой линейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка.

1. Уравнение колебания гибкой струны (одномерное волновое уравнение)
$u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0$ $u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0$
(8)
2. Трехмерное уравнение Лапласа: $\Delta u = 0$ $\Delta u = 0$
(9)
где $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$
3. Трехмерное волновое уравнение: $\Delta u - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0$ $\Delta u - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0$
(10)
где с – скорость распространения волны.

4. Уравнение теплопроводности (уравнение диффузии)
$\Delta u - \frac{1}{a^2} u_t = 0$ $\Delta u - \frac{1}{a^2} u_t = 0$
(11)
Если *u* – температура в некоторой точке тела, то константа a^2 a^2 выражается через теплопроводность, удельную теплоемкость и плотность вещества.
5. Уравнение Шредингера:
$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + v(x, y, z)\psi = 0$ $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + v(x, y, z)\psi = 0$,
(12)
где $\psi = \psi(x, y, z)$ $\psi = \psi(x, y, z)$ – волновая функция, $v(x, y, z)$ $v(x, y, z)$ - потенциал.

Уравнения (8) – (12) являются однородными. Линейная комбинация решений однородного уравнения также является его решением.

Более реалистичные физические процессы описываются неоднородными уравнениями, которые включают в себя член, соответствующий приложенным силам или источникам (поля, тепла и т.д.). Например, если к колеблющейся струне приложена сила, то ее колебания описываются неоднородным уравнением вида: $u_{xx} - \frac{1}{c^2}u_{tt} = f(x,t)u_{xx} - \frac{1}{c^2}u_{tt} = f(x,t)$.
Задача может быть неоднородной и вследствие неоднородного краевого условия, например, если конец струны движется з0аданным образом:
$u(0,t) = \varphi(t)u(0,t) = \varphi(t)$.
В подобных случаях нарушается критерий однородной краевой задачи, то есть линейная комбинация решений уравнения уже не является решением. Общее решение неоднородной задачи представляет собой сумму любого частного решения задачи и общего решения соответствующей однородной задачи, для которой уравнение и краевые условия однородны (аналогия с ОДУ).

Наряду с общими чертами, присущими ОДУ и УЧП, между ними имеются существенные различия. Например, общее решение дифференциального УЧП содержит не произвольные постоянные, а произвольные функции (в количестве, равном порядку уравнения).